

Spektrale Dichten

Ralf Blendowske

20. Februar 2021

Zusammenfassung

Spektrale Größen können in Abhängigkeit von der Frequenz wie von der Wellenlänge dargestellt werden. Der Wechsels zwischen diesen Variablen führt zu überraschenden Veränderungen der Gestalt der Spektren. Die Transformation von Leistungen zu Photonenzahlenraten liefert weitere Varianten. Die entsprechenden Formeln werden an realen Messdaten und analytischen Beispielen diskutiert.

1 Einleitung

In der Optik hängen viele Größen von der Wellenlänge λ ab: die Brechzahl $n(\lambda)$, die Brennweite $f'(\lambda)$, der Transmissionsgrad $\tau(\lambda)$, der Reflexionsgrad $\rho(\lambda)$, usw. Da für eine Welle der folgende Zusammenhang zwischen der Frequenz f und der Lichtgeschwindigkeit c besteht:

$$\lambda \cdot f = c \quad (1)$$

können alle Größen genauso gut als Funktion der Frequenz betrachtet werden, indem $\lambda = c/f$ ersetzt wird $n(c/\lambda)$ usw. Auch wenn die Frequenz als unabhängige Variable für diese dimensionslosen Größen praktisch kaum verwendet wird, sieht die Situation bei der Darstellung von Spektren anders aus.

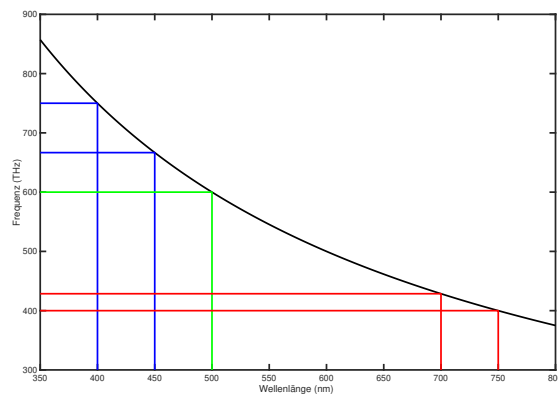


Abbildung 1: Zusammenhang von Frequenz (Ordinate) und Wellenlänge (Abszisse)

Als Einheit der Frequenz wird häufig Terahertz (Thz) verwendet, weil dann die Frequenzen im sichtbaren Bereich mit 3-stelligen Zahlen im Hunderter-Bereich geschrieben werden können. Für die Umrechnung gilt dann die Regel

$$f[\text{THz}]\lambda[\text{nm}] = 300000$$

Für den Wert von 500 nm Wellenlänge erhalten wir somit eine Frequenz von 600 THz.

Den funktionalen Zusammenhang zeigt Abb. 1. Wegen der umgekehrten Proportionalität liefern lange Wellenlängen (rot) kleine Werte für die Frequenzen und kurze Wellenlängen (blau) große Werte.

Beachte, dass gleich lange Intervalle der Wellenlänge in unterschiedlich große Intervalle im Frequenzbereich abgebildet werden. Für große Wellenlängen werden die Frequenzintervalle relativ zu kleinen Wellenlängen gestaucht.

Für ein Intervall $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ kann das dazugehörige Frequenzintervall so berechnet werden

$$\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{c}{\lambda_2} - \frac{c}{\lambda_1} = -c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1\lambda_2} \quad (2)$$

Beachte, dass für ein positives Intervall $\Delta\lambda$ das Vorzeichen des Frequenzintervalls negativ wird, da die Frequenz umgekehrt proportional zur Wellenlänge ist. Für sehr kleine Intervalle kann die Steigung $\Delta f / \Delta\lambda$ durch die erste Ableitung genähert werden

$$\frac{df}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2} \quad (3)$$

2 Spektrale Größen

Strahlung transportiert Energie. Wenn die Verteilung der Energie S in Bezug auf die Wellenlänge betrachtet werden soll, dann wird die Energiedichte S_λ eingeführt

$$S_\lambda = \frac{\Delta S}{\Delta\lambda} \quad (4)$$

Diese Größe gibt an, wieviel Energie ΔS sich im Intervall $\Delta\lambda$ befindet, oder $\Delta S = S_\lambda \Delta\lambda$. Wenn für ein festes ΔS das Intervall klein ist, dann steigt die Dichte; wenn es groß ist, dann fällt sie. Meist ist aber das Intervall $\Delta\lambda$ konstant, und die Dichte variiert direkt mit ΔS .

Bei einer spektralen Größe handelt es sich um eine Dichte, also um das Verhältnis zweier Größen, die oft physikalisch unterschiedliche Einheiten besitzen. In diesem Fall das Verhältnis von Energie zu Länge. An der Stelle von „spektralen Größe“ wird auch oft unsauber von Spektrum gesprochen, wenn klar ist, welche „Größe“ gemeint ist. So sind beide Formulierungen „spektrale Strahldichte“ oder das „Spektrum der Strahldichte“ in Gebrauch.

Messtechnisch kann das Intervall $\Delta\lambda$ durch einen wellenlängenabhängigen Filter realisiert werden, der den Bereich $\Delta\lambda$ für die Messung zugänglich macht. In Spektrometern wird mittels Dispersion die Strahlung bezüglich der Wellenlänge räumlich auseinander gezogen und dann über einen Sensor orts aufgelöst detektiert. Dies ist dann eine räumliche Filterung.

Die Schreibweise mit dem Index λ orientiert sich am mathematischen Grenzfall infinitesimal kleiner Intervalle. Dann steht der Quotient im Grenzfall für

die erste Ableitung von S nach der Wellenlänge λ . Diese Ableitung wird dann als Index symbolisiert: S_λ . Messtechnisch kann dieser mathematische Grenzfall niemals realisiert werden, weil das Signal-Rauschverhältnis dann wegen der kleinen Messgrößen beliebig schlecht wird. Der Grenzwert der Messgrößen wird daher nicht mathematisch ermittelt, sondern effektiv mittels des tatsächlichen realisierten Intervalls $\Delta\lambda$ geschätzt. Die Ergebnisse sind dann aber über Intervallbreite gemittelte Größen, und Aussagen über das Verhalten bei kleineren Intervallen sind unzulässig. Typische Werte sind $\Delta\lambda = \{1; 5; 10\}$ nm.

Im Fortgang treten anstelle der Energie Größen auf, die selbst schon Dichten, also Verhältnisgrößen, sind. So kann etwa die Bestrahlungsstärke $E = \Delta\Phi/\Delta A$ als Verhältnis von Strahlungsfluss (Energie pro Zeit) zur durchstrahlten Fläche A zusätzlich noch als spektrale Bestrahlungsstärke E_λ interessieren, um Aussagen über die Verteilung dieser Größe über die Wellenlänge machen zu können.

Um Daten einfacher interpretieren zu können, werden die Vorfaktoren der physikalischen Einheiten bei „Dichten von Dichten“ oft an die gängige Messpraxis angepasst. Am Beispiel der Bestrahlungsstärke gilt als Einheit W/m^2 . Für die spektrale Bestrahlungsstärke wird das Wellenlängenintervall meist in Nanometer anstatt in Meter angegeben. Dies liefert die Einheit $\text{W}/\text{m}^2/\text{nm}$. Die dazugehörigen numerischen Werte der Messdaten sind dann um eine Faktor 10^9 größer als bei Verwendung der Einheit Meter: $\text{W}/\text{m}^2/\text{m} = \text{W}/\text{m}^3$. Für Anwendungen im IR-Bereich wird die Wellenlänge oft in μm angegeben, dann wird die spektrale Größe wieder einen anderen numerischen Wert haben. Mit der entsprechenden Aufmerksamkeit stellen diese Varianten aber kein Problem dar.

3 Wechsel der unabhängigen Variablen: $\lambda \leftrightarrow f$

Betrachten wir exemplarisch weiterhin die spektrale Bestrahlungsstärke E_λ . Anstelle der Variation mit der Wellenlänge soll nun die Abhängigkeit von der Frequenz angeschaut werden. Dazu sind zwei Schritte nötig: erstens muss die Ersetzung der Wellenlänge durch die Frequenz erfolgen: $\Delta E(\lambda = c/f)$. Dies alleine reicht nicht aus, denn zweitens muss auch die Änderung des Intervalls, auf das die Größe bezogen wird, beachtet werden:

$$E_\lambda = \frac{\Delta E(\lambda)}{\Delta\lambda} = \frac{\Delta E(c/f)}{\Delta f} \frac{\Delta f}{\Delta\lambda} = E_f \frac{\Delta f}{\Delta\lambda}$$

Die Multiplikation mit dem Faktor $\Delta f/\Delta\lambda$ entspricht der Kettenregel beim Ableiten von Funktionen. Das Ergebnis zeigt, dass die beiden Dichten nicht durch Einsetzen der anderen Variable direkt auseinander hervorgehen, sondern zwingend der Umrechnungsfaktor $\Delta f/\Delta\lambda$ berücksichtigt werden muss. Die Funktionen E_λ und E_f unterscheiden sich nicht nur durch den Wechsel der Variable, sondern auch dadurch, dass die eine Funktion auf konstante Intervallbreiten $\Delta\lambda$ und die andere auf konstante Intervallbreiten Δf bezogen sind.

Für ein gegebenes kleines Intervall der Wellenlänge gilt für die Bestrahlungsstärke $\Delta E = E_\lambda \Delta\lambda$. Wird dasselbe Intervall mit identischen Grenzen nun im Frequenzraum betrachtet, dann gilt $\Delta E = E_f \Delta f$. Da die Bestrahlungsstärke unabhängig davon ist, mit welcher Variablen das Intervall gemessen wird, muss gelten

$$E_f \Delta f = E_\lambda \Delta\lambda \quad (5)$$

Eine Umkehrung der Intervallgrenzen führt dabei zu einem negativen Vorzeichen. Um diese Art von negativen spektrale Größen zu vermeiden, wird immer der Betrag des Umrechnungsfaktors verwendet, also

$$E_\lambda = E_f \left| \frac{\Delta f}{\Delta \lambda} \right|$$

Als Endergebnis erhalten wir

$$E_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} E_f(c/\lambda) \quad E_f = \frac{c}{f^2} E_\lambda(c/f) \quad (6)$$

Der Umrechnungsfaktor c/λ^2 , bzw. sein Kehrwert, ist auch bei allen anderen spektralen Größen anzuwenden, wenn anstelle der Frequenz die Wellenlänge oder umgekehrt als unabhängige Variable verwendet werden soll.

Für große Intervalle muss die Bilanz integral geschrieben werden

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} E_\lambda d\lambda = \int_{f_2}^{f_1} E_f df$$

wobei die Umkehr der Intervallgrenzen berücksichtigt wurde. Der Umrechnungsfaktor, der bei einer Variablensubstitution auftritt, ist hier im 1-dimensionalen Fall ein Beispiel für die sogenannte Jacobi-Matrix.

3.1 Beispiel: Hyperbelförmiges Spektrum

Mit dem Wechsel der Variablen $\lambda \leftrightarrow f$ werden dieselben Informationen unterschiedlich transportiert. Die grafische Darstellung derselben Information kann sich aber für die beiden Dichten deutlich unterscheiden. Hier betrachten wir ein Beispiel, bei dem sich der qualitative Verlauf nicht ändert, nämlich dann wenn ein Spektrum vorliegt, dass einen hyperbelartigen Verlauf hat.

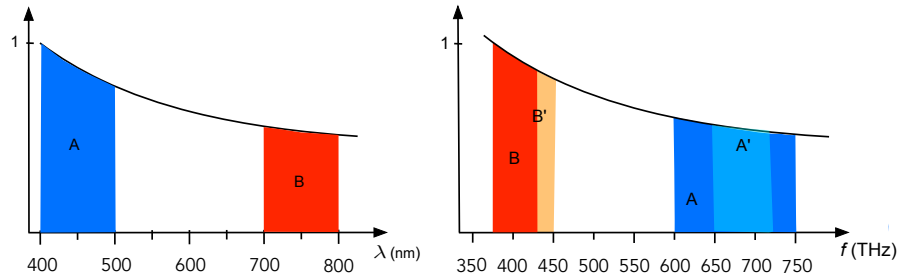


Abbildung 2: Hyperbelspektrum als Funktion der Wellenlänge und der Frequenz. Die Flächen A, B für zwei gleich breite Intervalle bleiben unverändert, aber die Breite der Intervalle ändert sich: gleiche Breiten der Wellenlängen werden im Roten gestaucht und im Blauen gestreckt. Gleiche Breiten für λ : Quelle strahlt im Blauen mehr ab als im Roten ($A > B$). Gleiche Breiten für f : Quelle strahlt im Roten mehr ab als im Blauen ($B' > A'$).

Wir betrachten nun eine Quelle, die in einem endlichen Intervall, $\lambda \in [400, 800]$ nm, im sichtbaren Bereich ein Spektrum der Form

$$S_\lambda = \frac{a}{\lambda}$$

abstrahlt, wobei $a = 400$ eine Konstante ist. Sie ist so gewählt, dass am linken Rand das Spektrum in beliebigen Einheiten den Wert 1 annimmt. Zum roten Ende, also zu den langen Wellenlängen fällt das Spektrum wie eine Hyperbel auf kleinere Werte ab. Diese Darstellung legt nahe, dass die Quelle mehr Leistung im blauen als im roten Bereich abstrahlt. Dies wird sich als problematisch erweisen.

Betrachten wir dazu nun den Wechsel zur Frequenz als Variable, dann folgt für die Dichte

$$S_f = \frac{c}{f^2} \frac{af}{c} = \frac{a}{f}$$

Wir erhalten wieder eine Hyperbel. Die mathematische Form beider Funktionen ist identisch. Allerdings fällt das Spektrum zu hohen Frequenzen f hin ab, also zum blauen Ende. Aus dieser Perspektive strahlt die Quelle mehr Leistung im roten als im blauen Bereich ab.

Fragen wir nach der Gesamtleistung, die abgestrahlt wird, dann gilt

$$S = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{a}{\lambda} d\lambda = a \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Für die Frequenzen erhalten wir unter Beachtung der Umkehrung der Integrationsgrenzen, da $f_1 > f_2$, wie zu erwarten dasselbe Ergebnis

$$S = \int_{f_2}^{f_1} \frac{a}{f} df = a \ln \frac{f_1}{f_2}$$

Die Hälfte der Leistung $S/2$ ergibt sich im Intervall $[\lambda_1, \lambda_M]$, wobei die „Mitte“ durch das geometrische Mittel $\lambda_M = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \approx 566 \text{ nm}$ bestimmt wird. Die dazugehörige Frequenz liegt bei $f_M = c/\lambda_M$. Für S_λ liegt λ_M näher am blauen Ende, während f_M für S_f näher am roten Ende des Intervalls liegt.

Die Frage, ob eine Quelle in einem Bereich mehr als in einem anderen abstrahlt, lässt sich am besten für zwei Wellenlängenbereiche beantworten. Nehmen wir zwei gleich lange Intervalle mit einer Breite von je 100 nm, die zwischen $\lambda_1 = 400$, $\lambda_2 = 550$ und $\lambda_3 = 700$, $\lambda_4 = 800$ liegen. Die dazugehörigen Flächen (in beliebigen Einheiten) lassen aus den Mittelwerten der Intervallgrenzen sowie den Breiten abschätzen: $A = 90$ und $B = 54$. Das Verhältnis der Flächen beträgt etwa 0,6. Dieses Ergebnis legt nahe, dass die Quelle im Blauen mehr Leistung abstrahlt als im Roten. Nach einem Wechsel zur Frequenzdarstellung erhalten wir zwar wie zu erwarten dieselben Flächeninhalte, aber unterschiedliche Intervallbreiten: 54 THz und 150 THz.

Würden wir aber stattdessen gleiche Intervallbreiten verwenden, beispielsweise $\Delta f = 75 \text{ THz}$, dann wäre Fläche B' deutlich größer als Fläche A' und es wäre angemessen zu behaupten, dass die Quelle im Roten mehr abstrahlt als im Blauen.

Dieser Widerspruch lässt sich nicht auflösen, weil die Formulierungen nicht streng genug sind: ohne eine Angabe, welche Variable gleichabständig unterteilt wird, können beide Varianten richtig sein, ohne dass daraus ein Widerspruch entsteht, weil beide Beschreibungen mit den Variablen λ und f zulässig sind. Bei Dichten ist diese Zwiespältigkeit nicht zu vermeiden, weil eine Dichte ein Verhältnis von zwei Größen ist - und die Verteilung auf ein äquidistantes Wellenlängenraster andere Ergebnisse liefert als wenn die Frequenzskala gleichabständig unterteilt wird. Je breiter ein Spektrum ist, desto eher macht sich

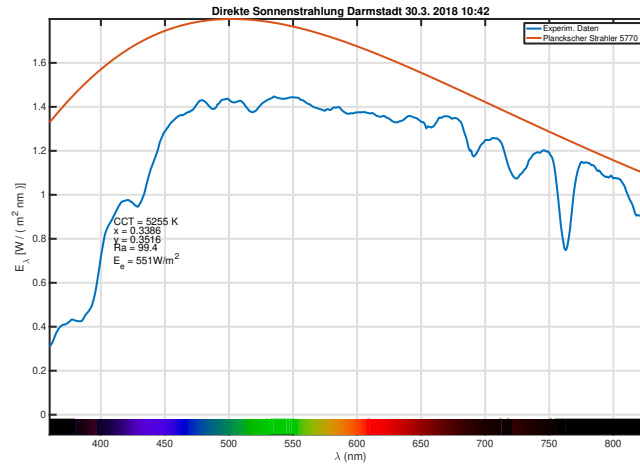


Abbildung 3: Die spektrale Bestrahlungsstärke bei Sonnenschein (experimentelle Daten in blau). Der Verlauf der spektralen Dichte zeigt qualitativ einen Anstieg bis etwa 500 nm, ein Plateau bis etwa 600 nm und einen leichten Abfall zu längeren Wellenlängen. Extraterrestrisch kann die Strahlung durch einen Planckschen Strahler mit $T = 5770$ K angenähert werden.

diese Problematik bemerkbar. Eine Quelle, die nur im Blauen strahlt, wird dort mehr abstrahlen als im Roten, unabhängig davon, welche Darstellungsweise wir verwenden.

3.2 Beispiel: Spektrum der Sonne

Das bisherige Beispiel war eher ein theoretisches Beispiel. Nun sollen mittels realer Messdaten, am Beispiel des Spektrums der Sonnenstrahlung, die unterschiedlichen Darstellungsweisen diskutiert werden.

Die spektrale Bestrahlungsstärke bei Sonnenschein zeigt Abb. 3. Der Verlauf der spektralen Dichte zeigt qualitativ einen Anstieg bis zu einer Wellenlänge von etwa 500 nm, ein Plateau bis etwa 600 nm und einen leichten Abfall zu längeren Wellenlängen hin. Die atmosphärische Absorption durch unterschiedliche chemische Elemente moduliert dieses Verhalten im Detail. Das menschliche Auge scheint sich mit seiner maximalen Empfindlichkeit bei 555 nm in seiner Evolution der Lage des Plateaus zwischen 500 und 600 nm angepasst zu haben.

Wechseln wir nun die Variable und schauen uns den Verlauf der spektralen Bestrahlungsgröße als Funktion der Frequenz an, vgl. Abb. 4. Die Abszisse der rechten Abbildung ist umgekehrt orientiert, also so, dass die hohen Frequenzen („blau“) links liegen anstatt rechts. Die Frequenz ist in THz skaliert und bei 600 THz liegt die Wellenlänge 500 nm („Grün“).

Wie zu erwarten ist der Bereich niedriger Frequenzen im Vergleich gestaucht und der Bereich hoher Frequenzen gestreckt. Die einzelnen Absorptionszacken (prominent O_2 bei 760 nm) bleiben unverändert erkennbar, aber der globale Verlauf der Kurve hat sich drastisch verändert. Wir beobachten nur noch einen nahezu linearen Anstieg zu niedrigen Frequenzen, oder: einen linearen Abfall mit steigenden Frequenzen.

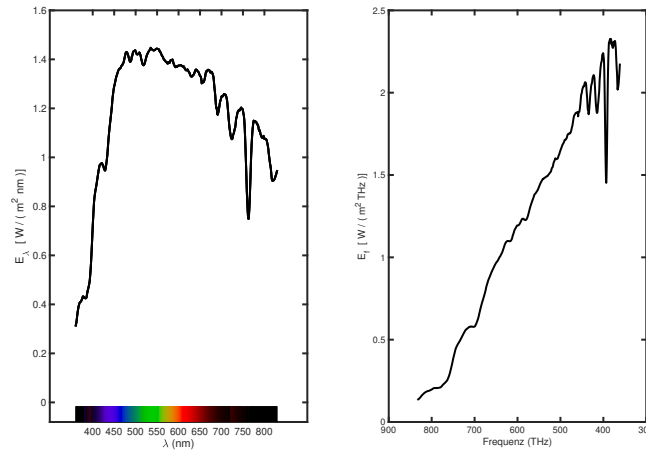


Abbildung 4: Das Spektrum des Tageslichts in Abhängigkeit von der Wellenlänge (links) und von der Frequenz (rechts) dargestellt. Die Abszisse der rechten Abbildung ist zur besseren Vergleichbarkeit von hohen zu niedrigen Frequenzen orientiert.

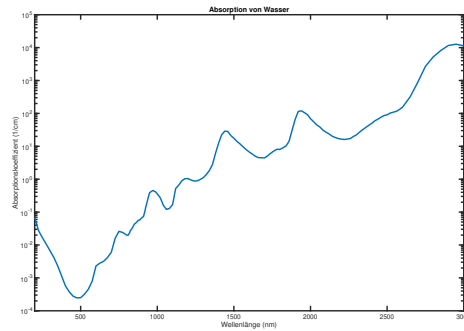


Abbildung 5: Die Absorption von Wasser als Funktion der Wellenlänge: Das absolute Minimum liegt etwa bei 500 nm.

Von dem evolutionsbiologischen Argument für die maximale Empfindlichkeit des Auges bleibt nichts mehr übrig. Es ist allein der zufälligen Entscheidung für die Darstellung der Dichte bezüglich der Wellenlänge geschuldet.

Allerdings gibt es ein anderes Argument für die Position der maximalen Empfindlichkeit des Auges: die Absorption vom Wasser hat bei 500 nm ein Minimum, siehe Abb. 5 (G. M. Hale and M. R. Querry, "Optical constants of water in the 200 nm to 200 μ m wavelength region," Appl. Opt., 12, 555--563, (1973)). Wenn Leben im Wasser entstanden ist, dann entspricht das, was wir den sichtbaren Bereich nennen, dem Fenster mit der minimalen Absorption von Wasser. Da es sich beim Absorptionskoeffizienten nicht um eine Dichte handelt, ändert sich die Gestalt der Kurve nur hinsichtlich der Skala, wenn Frequenzen statt Wellenlängen verwendet werden. Die Extrema der Funktion, insbesondere das Minimum bei 500 nm, bleiben in ihrer Lage unverändert.

3.3 Beispiel: Parabelförmiges Spektrum

Wir betrachten nun nochmals ein analytisches Beispiel, an dem die Änderung der Form des Verlaufs leicht sichtbar wird. Das Spektrum hat Funktion als der Wellenlänge die Form einer nach unten geöffneten Parabel. Der Einfachheit halber benutzen wir eine einheitenlose spektrale Größe $\mathcal{E}_\lambda$, deren Maximalwert an der Stelle $\lambda = \lambda_m$ den Wert 1 hat. Im Folgenden verwenden wir relative Wellenlängen und Frequenzen, die auf die Position λ_m normiert sind

$$\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_m \quad \bar{f} = f/f_m \quad (7)$$

Es gilt dann die Relation

$$\bar{\lambda}\bar{f} = \frac{c}{\lambda_m f_m} = 1 \quad (8)$$

oder $\lambda = \bar{\lambda}/\bar{f}$. Die Öffnung der Parabel wird durch einen Parameter $0 \leq \alpha$ beschrieben:

$$\mathcal{E}_\lambda = \begin{cases} 1 - \alpha(1 - \bar{\lambda})^2 & \bar{\lambda}_1 \leq \bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (9)$$

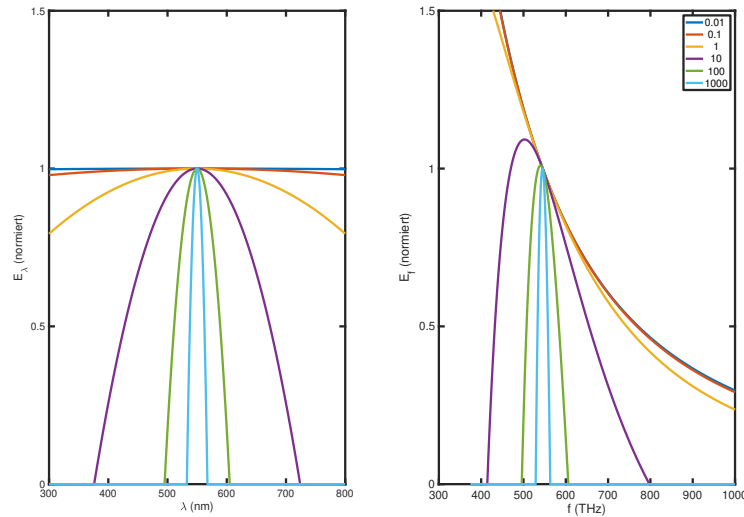


Abbildung 6: Parabelförmige spektrale Größe (Wellenlänge) für unterschiedliche Werte des Parameters α für die Parabelöffnung (links). Rechts: die spektrale Größe bezogen auf die Frequenz. Als zentrale Wellenlänge wurde 550 nm gewählt.

Wenn für die Werte $\bar{\lambda}_{1,2}$ die Nullstellen $\bar{\lambda}_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1/\alpha}$ verwendet, dann geht die Funktion an diesen Stellen stetig, aber nicht differenzierbar in die null über. Es können aber auch engere Bereiche mittels $\bar{\lambda}_{1,2}$ gewählt werden, so dass auch Werte $\alpha > 1$ zulässig sein können. Dann hat die Funktion an diesen Stellen einen Sprung. Für $\alpha = 0$ erhalten wir ein „energiegleiches“ konstantes Spektrum, also $\mathcal{E}_\lambda = 1$.

Für die einheitenlose Dichte $\mathcal{E}_{\bar{f}}$, die auf die normierte Frequenz bezogen ist, erhalten wir daraus

$$\mathcal{E}_{\bar{f}} = \mathcal{E}_{\bar{\lambda}}(\bar{\lambda} = 1/\bar{f}) \cdot \frac{1}{\bar{f}^2} = \left(1 - \alpha\left(1 - \frac{1}{\bar{f}}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{\bar{f}^2} \quad (10)$$

Dies ist eine nichtlineare gebrochene Funktion der Form $a/\bar{f}^2 + b/\bar{f}^3 + c/\bar{f}^4$. Für $\bar{f} = 1$ nimmt die Funktion immer den Wert 1 an. Für $\alpha = 1$ liegt das Maximum bei $\bar{f} = 2/3$, also zu einem kleineren Wert als $\bar{f} = 1$ hin verschoben. Die Nullstellen liegen bei

$$\bar{f}_{1,2} = \frac{1}{1 \pm \sqrt{1/\alpha}}$$

Beachte, dass für $\alpha < 1$ eine Nullstelle negativ wird. Physikalisch kann diese Nullstelle nicht realisiert werden, da $f \geq 0$ gelten muss.

Für das konstante Spektrum $\mathcal{E}_{\lambda} = 1$ mit $\alpha = 0$ erhalten wir bezogen auf die Frequenz die Dichte

$$\mathcal{E}_{\bar{f}} = \frac{1}{\bar{f}^2} \quad (11)$$

die einen hyperbelartigen Verlauf zeigt und keineswegs konstant ist. Die Antwort auf die Frage: „Wie sieht ein konstantes Spektrum aus?“ hängt demnach von der Variable ab, auf die die Dichte bezogen ist.

Wie aus Abb. 6 qualitativ ersichtlich wird, verändert sich ein Spektrum der Form nach wenig beim Wechsel $\lambda \leftrightarrow f$, wenn es stark lokalisiert ist ($\alpha \gg 1$). So ändert sich an der Form und Lage von schmalen Spektrallinien wenig. Je breiter die Funktion aber wird ($\alpha < 1$), desto größer wird der Einfluss des Umrechnungsfaktors (der Jacobi-Matrix). Die Form ändert sich dann drastisch zu stark unsymmetrischen Verläufen.

Das „energiegleiche Spektrum“ hat eine konstante Energie pro Wellenlängenintervall und wird oft für die Definition der Farbe „Weiß“ verwendet. Dies hat nichts mit dem „weißen Rauschen“ zu tun, das eine konstante Energiebelegung pro Frequenzintervall hat.

4 Leistung und Photonenraten

Traditionell wird bei spektralen Größen die Strahlungsleistung als Grundgröße des Zählers der Dichte betrachtet. Dies rührt daher, dass viele Sensoren mit Bezug auf die Leistung kalibriert sind. Solarkollektoren liefern elektrische Leistung, die von der einfallenden Strahlungsleistung abhängt.

Bei Bildaufnehmern wie unseren Augen oder einem CMOS-Detektor ist aber nicht die Leistung, sondern die Anzahl der Photonen pro Zeit, also die Photonenrate, entscheidend. Die Reaktionen vieler Sensoren für ein gegebenes Zeitintervall sind proportional zur Anzahl der Photonen und nicht proportional zur Energie. Diese Sensoren sind „Photonenzähler“. Auch viele Spektrometer gehören in diese Klasse und geben daher die Ergebnisse in „Counts“ pro Wellenlängenintervall an. Zwar steigt mit der Photonenrate, die mit $\dot{N}$ bezeichnet wird, auch die Leistung, aber diese Zunahme ist abhängig von der Frequenz des Photons, denn für die Energie des Photons gilt

$$W_{\text{photon}} = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad (12)$$

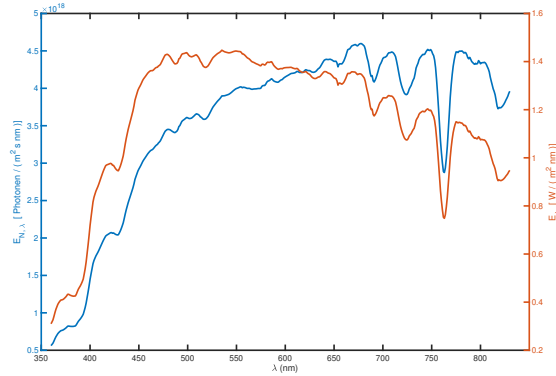


Abbildung 7: Spektrale Bestrahlungsstärke der Sonnenstrahlung bezogen auf die Photonenzahlen pro Zeit (linke Achse) und auf die Leistung (rechte Achse)

wobei h für das Plancksche Wirkungsquantum steht. Bei gleichem Energiebudget lassen sich daher mehr „rote“ als „blaue“ Photonen erzeugen. Natürlich haben Photonen keine Farbe. Sie ist eine Eigenschaft des menschlichen Gehirns, aber die knappe Formulierung kann unmissverständlich als Wellenlängenbereich interpretiert werden.

Umgekehrt bedeuten 100 Photonen mit einer Wellenlänge von 400 nm doppelt so viel Energie wie 100 Photonen mit einer Wellenlänge von 800 nm. Daher entsteht der Bedarf, spektrale Größen in Photonenzahlen-basierte Größen umzurechnen.

Im Unterschied zur bisherigen Betrachtungsweise untersuchen wir nun einen Wechsel der unabhängigen Variablen: anstelle von Leistungen werden nun Photonenzahlen betrachtet. Dann gibt es aber wieder zwei Varianten für die unabhängige Variable: Wellenlänge oder Frequenz. Wir gehen von einem vorgegebenen Spektrum S_{λ} mit der Einheit $\text{W/m}^2/\text{nm}$ aus und möchten diese Daten in die Photonenzahl pro Sekunde umrechnen. In einem Wellenlängenintervall $\Delta\lambda$ (in nm) liegt die Leistung $S_{\lambda}\Delta\lambda$ vor. Jedes Photon in diesem kleinen Intervall $\Delta\lambda$ hat die Energie hc/λ . Die Anzahl der Photonen in diesem Intervall pro Zeiteinheit beträgt dann

$$\dot{N}_{\lambda}\Delta\lambda = \frac{S_{\lambda}}{hc/\lambda}\Delta\lambda \quad (13)$$

Die Problematik, dass es nur ganze Photonen geben kann, ignorieren wir an dieser Stelle und runden das Ergebnis bei Bedarf auf eine Integer-Zahl. Die damit verbundene Unsicherheit im Ergebnis hat bei den in der Praxis großen Photonenzahlen keine praktische Bedeutung. Für kleine Photonenzahlen muss das Photonenrauschen in den Blick genommen werden, und es entsteht zusätzlich das Problem „verrauschter“ Dichten, das wir hier nicht behandeln werden. Als Ergebnis erhalten wir die Umrechnungsformel

$$\dot{N}_{\lambda} = \frac{\lambda}{hc}S_{\lambda} \quad (14)$$

Beachte, dass hier die Wellenlänge λ in derselben Einheit wie das Produkt hc verwendet werden muss, also in der Regel in m angegeben wird. Von konstanten

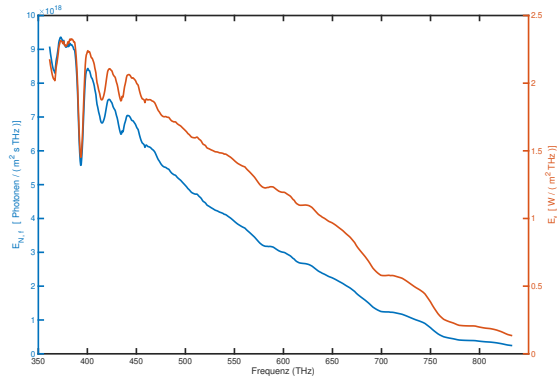


Abbildung 8: Spektrale Bestrahlungsstärke der Sonnenstrahlung bezogen auf die Frequenz: Photonenzahlen pro Zeit (linke Achse) und Leistung (rechte Achse)

Faktoren abgesehen gilt $\dot{N}_\lambda \propto \lambda S_\lambda$. Das Spektrum wird mit der Wellenlänge multipliziert, so dass es relativ gesehen bei kurzen Wellenlängen abgesenkt und bei langen angehoben wird. Dies lässt auch die Abb. 7 erkennen. Mit Bezug auf die Photonenzahlen steigt die Dichte bis etwa 650 nm an, um dann ein in etwa konstant zu bleiben.

Möchte man die Dichte mit Bezug auf die Frequenz angeben, dann erfolgt die Umrechnung nach den oben angegebenen Schritten:

$$\dot{N}_f = \frac{c}{f^2} \dot{N}_\lambda = \frac{c}{hf^3} S_\lambda (\lambda = c/f) \quad (15)$$

5 Spektraler Hellempfindlichkeitsgrad

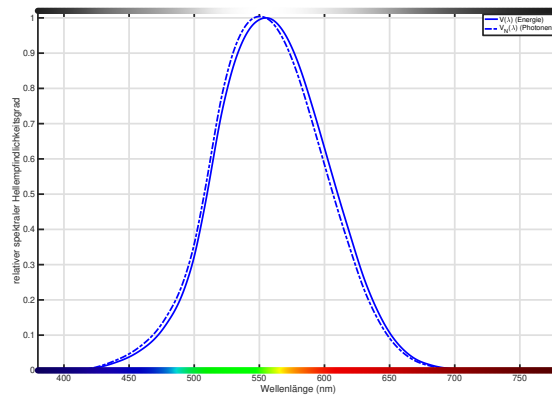


Abbildung 9: Der spektrale Hellempfindlichkeitsgrad bezogen auf Leistungen von Strahlungsquellen und hinsichtlich Photonenzahlen. Die Verschiebung des Maximums beträgt etwa 5 nm nach links.

Beim Übergang von radiometrischen zu fotometrischen Größen wird der sogenannte relative spektrale Hellempfindlichkeitsgrad $V(\lambda)$ benötigt. Als relative Größe ist sie dimensionslos; es handelt sich trotz des Adjektivs „spektral“ nicht

explizit um eine Dichte. Werden zwei monochromatische Quellen mit den Wellenlängen λ_1 und λ_2 und den Leistungen $S_k = S_\lambda(\lambda_k)\Delta\lambda$, $k = 1, 2$, hinsichtlich ihrer „Helligkeit“ verglichen, dann erscheinen beide Quellen gleich hell, wenn gilt

$$S_1 V(\lambda_1) = S_2 V(\lambda_2) \quad (16)$$

Dies legt die Funktion $V(\lambda)$ nur bis auf einen konstanten Faktor fest. Die Normierung erfolgt so, dass beim Maximalwert der Wert 1 angenommen wird

$$V(\lambda_{\max}) = 1 \quad (17)$$

Dann gilt

$$V(\lambda) = \frac{S_\lambda(\lambda_{\max})}{S_\lambda(\lambda)} \quad (18)$$

Fragt man nicht, welche Leistungen zwei Quellen haben müssen, damit sie gleich hell erscheinen, sondern welche Photonenraten $\dot{N}_k$, $k = 1, 2$, sie dazu liefern müssen, dann gilt mit $S_k = \dot{N}_k h c / \lambda_k$ die Bilanz

$$V(\lambda_1) \dot{N}_1 / \lambda_1 = V(\lambda_2) \dot{N}_2 / \lambda_2$$

Wir führen nun die Größe

$$V_N(\lambda) = \frac{V(\lambda)}{\lambda}$$

ein, die den spektralen Hellempfindlichkeitsgrad bezogen auf die Photonenzahl N beschreibt und erhalten so die dazu gehörige Bilanz

$$V_N(\lambda_1) \dot{N}_1 = V_N(\lambda_2) \dot{N}_2$$

Mit der Normierung auf den Maximalwert gilt dann

$$V_N(\lambda) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda} V(\lambda) \quad (19)$$

Beim Übergang von energetischen Größen (S_λ) auf Photonenraten ($\dot{N}_\lambda$) muss mit dem Kehrwert der Wellenlänge multipliziert werden. Beispielsweise soll bei einer Wellenlänge λ_r im Roten 5-mal soviel Leistung benötigt werden wie im Grünen ($\lambda_{\max}$), um denselben Helligkeitseindruck zu erzeugen ($V(\lambda_r) = 0,2$). Dann ist die Zahl der Photonen aber nicht nur um den Faktor 5, sondern auch noch um den Faktor $\lambda_r / \lambda_{\max}$ angestiegen, weil langwellige Photonen weniger Energie besitzen als kurzwellige. Der Hellempfindlichkeitsgrad wird somit um den Faktor $\lambda_{\max} / \lambda$ kleiner, wenn er auf Photonenzahlen bezogen wird.

Abb. 9 zeigt den Verlauf der beiden Varianten. Sie unterscheiden sich durch eine leichte Verschiebung der Kurve, inklusive des Maximums, in Richtung kürzere Wellenlängen. Die maximale Empfindlichkeit liegt bei Bezug auf Photonenraten bei 550 nm, also um ca. 5 nm ins Blaue verschoben.

6 Frequenz oder Wellenlänge?

Schon 1965 wurde von dem Nobelpreisträger Wald vorgeschlagen, in der Optik ganz auf die Verwendung von Wellenlängen zu verzichten und stattdessen nur noch die Frequenz zu verwenden. Für die Frequenzskala sprechen folgende Argumente:

1. Die Energie eines Photons ist direkt proportional zu seiner Frequenz $W = hf$.
2. Die Frequenz eines Photons ist unabhängig vom Medium, in dem es sich bewegt. Dies gilt nicht für die Wellenlänge. Viele Normen verwenden daher die Frequenz der Strahlung.
3. Wenn die Einheit THz gewählt wird, dann ergeben sich auch für die Frequenzen des Lichtes im sichtbaren Bereich gut handhabbare dreistellige Zahlen: 375...750 THz für den Wellenlängenbereich 800...400 nm.
4. In der Foto-Chemie wie in der Foto-Biologie ist man direkt am Energiegehalt von Photonen interessiert. Grafische Darstellungen über die Frequenz lassen sich sehr leicht in anderer Energieeinheiten wie Elektronenvolt oder Kilokalorien umrechnen.
5. Gleiche Halbwertsbreiten von Absorptionsbanden im Frequenzbereich werden zu unterschiedlichen Halbwertsbreiten wenn sie über die Wellenlänge abgetragen werden. Die Halbwertsbreiten haben eine physikalische Bedeutung auf der Frequenzskala, denn sie messen Übergangswahrscheinlichkeiten. Nichts davon ist auf einer Wellenlängenskala direkt ersichtlich.
6. Viele Absorptionsspektren zeigen auf der Frequenzskala bei unterschiedlichen Positionen dennoch dieselbe Form. Es handelt sich um sogenannten „Templates“. Die Wellenlängenskala verdunkelt diese Zusammenhänge.

Allgemein kann man sagen, dass in der Wechselwirkung von Strahlung mit Materie die Frequenzskala klare Vorteile hat. Dieser Vorschlag hat sich aber nicht durchgesetzt und es gliche einem Kampf gegen Windmühlen, ihn erneut auszufechten.

Tatsächlich gibt es auch für die Wellenlängenskala gute Gründe, die oft mit dem räumlichen Aspekt der Periodizität einer Welle zu tun haben:

1. Bei Beugungsphänomenen ist das Verhältnis von der Größe der beugenden Öffnung zur Wellenlänge ein entscheidender Parameter.
2. Propagationsphänomene werden durch die Helmholtz-Gleichung unter Verwendung der Wellenlänge als Grundgröße beschrieben.
3. Grenzschichtphänomene (evaneszente Wellen) werden sinnvoll auf der Wellenlängenskala betrachtet.
4. In der optischen Längenmesstechnik (Interferometrie) ist die Wellenlänge und nicht die Frequenz die natürliche Bezugsgröße.
5. Selbst die Dispersion optischer Gläser $n(\lambda)$ wird heute durchgängig mittels der Sellmeier-Formel für Wellenlängen angegeben, obwohl vermutlich der Gebrauch der Frequenz Vorteile brächte.

Da beide Skalen in Gebrauch sind und beide ihre Berechtigung haben, lässt sich eine vereinheitlichte Darstellung, die sich auf eine der beiden Varianten beschränkt, nur unter Verlusten durchsetzen.

Eine symmetrische Situation kann durch die Einführung logarithmischer Variablen erzeugt werden, also durch die Substitution $s = \ln \lambda$ oder $t = \ln f$.

Dann gilt $\Delta s = \Delta\lambda/\lambda = -\Delta f/f = -\Delta t$. Bis auf das Vorzeichen sind die beide relativen Intervallbreiten gleich. Die Größe Δs ist zudem der Kehrwert der Auflösungsdefinition von Spektrometern. Damit wird die Abszisse in feste Intervalle $\Delta(\ln \lambda)$ unterteilt, die einer konstanten Auflösung der Messdaten entsprechen. Die spektralen Funktionen folgen dann aus $S_s = \lambda S_\lambda = f S_f = S_t$. Dieser Ansatz wird im Artikel von Jonathan M. Marr und Francis P. Wilkin: A better presentation of Planck's radiation law, Am. J. Phys. 80 (5), May 2012, diskutiert.