

Ralf Blendowske, Darmstadt

# Wieso funktionieren Gleitsichtgläser? Über Aberrationen in der Progressionszone

**Dass Gleitsichtgläser funktionieren und somit die Presbyopie erträglicher wird, daran besteht kein Zweifel. Warum die Optik von Gleitsichtgläsern aber doch etwas komplexer erscheint, als man es zunächst vermutet, davon handelt dieser Artikel.**

Das Rückgrat eines Gleitsichtglases bildet die so genannte Nabelpunktlinie, entlang derer sich der Brechwert des Glases kontinuierlich verändert. So wird es möglich, Objekte in unterschiedlichen Entfernungen zu betrachten, indem unterschiedliche Punkte des Glases zum Durchblick verwendet werden. Die fehlende Akkommodation wird durch Blickbewegungen ersetzt. An den Enden der Nabelpunktlinie schließen sich dann Fern- und Nahteil ohne Übergang an. Im Folgenden soll der Bereich der Nabelpunktlinie, also die Progressionszone, genauer in den Blick genommen werden. Dabei werden Ergebnisse vorgestellt, die der Autor gemeinsam mit E. Villegas und P. Artal am Laboratorio de Optica an der Universität von Murcia erarbeitet hat<sup>[1]</sup>.

Wie schnell ändert sich eigentlich der Brechwert im Progressionskorridor? Zur Abschätzung nehmen wir ganz grob dessen Länge mit 20mm an und verwenden eine typische Addition von 2,50dpt. Dann liegt eine Änderungsrate des Brechwertes von  $(2,5\text{dpt}/20\text{mm}) = 1/8\text{dpt} / \text{mm}$  vor.

Bekanntlich ist der Durchmesser der Eintrittspupille unseres Auges nicht beliebig klein. Wir nutzen also nicht nur einen Punkt, sondern immer einen ausgedehnten Bereich um einen Punkt der Nabelpunktlinie. Nehmen wir beispielsweise einen Durchmesser von 4 mm an, so ergibt sich daraus eine Änderung des Brechwertes von  $4\text{mm} \times 1/8\text{dpt}/\text{mm} = 0,5\text{dpt}$  über die Pupille. Ist das nicht überhaupt ein bisschen viel? Warum funktioniert ein Gleitsichtglas dann eigentlich?

Die einfache und richtige Antwort lautet *nicht*: Das Auge gewöhnt sich daran. Ein gutes Gleitsichtglas braucht keine Gewöhnung – schlechte Zentrierung schon eher. Die Antwort hat etwas mit Aberrationen, also mit Bildfehlern, zu tun. Da es niemals eine perfekte Optik gibt, ist die entscheidende Frage immer: Wie groß sind die Aberrationen und welchen Einfluss haben sie auf das Sehen?

Jede Firma, die ein Gleitsichtglas entwirft, hat Rechenprogramme, mit denen sie zeigen kann, dass im Design die Aberrationen entlang der Nabelpunktlinie unbedeutend sind. Das kann man glauben, aber es zu verstehen wäre besser. Prinzipiell könnte man auch selbst ein kommerzielles Optikrechenprogramm verwenden, die Flächendaten eingeben und nachschauen, was im Progressionskorridor passiert. Theore-

tisch geht das, aber praktisch wird es schwierig, weil Sie die Flächendaten in der Regel nicht haben. Bei einem Anruf in einer entsprechenden Firma wird das Gespräch recht einseitig, wenn Sie dort nach konkreten Flächendaten fragen. Was tun?

Als Alternative bleibt, ein Modell für die Progressionszone zu verwenden, das so einfach ist, dass man etwas verstehen kann. Wenn dann dieses Modell auch noch experimentell abgesichert werden kann, wenn sich also Gleitsichtgläser im Experiment tatsächlich damit charakterisieren lassen, dann hat man ein Werkzeug, um die Optik der Progressionszone besser zu verstehen.

Was in lateraler Richtung, also seitlich der Nabelpunktlinie passiert, darüber gibt uns der Satz von Minkwitz Auskunft<sup>[2]</sup>.

Hier soll nun ergänzend die Richtung entlang der Nabelpunktlinie betrachtet werden. Im nächsten Abschnitt wird dafür ein einfaches mathematisches Modell vorgestellt. Dessen Ergebnisse und der Vergleich mit experimentellen Untersuchungen schließen sich daran an. Der eilige Leser mag daher den folgenden Abschnitt zunächst überspringen.

## ■ Ein einfaches Modell der Progressionszone

Um die Verhältnisse möglichst übersichtlich zu halten, betrachten wir nur die Progressionsfläche des Gleitsichtglases und dort nur den Progressionsbereich. Außerhalb dieser Zone verliert dieses Modell daher jede Bedeutung. Wenn eine Wellenfront  $W$  von einem Objekt kommend auf ein Gleitsichtglas trifft, dann ändert sich ihre Gestalt durch die Brechung an beiden Flächen und durch den Transfer von einer Fläche zur anderen. Die Rezeptwerte oder prismatischen Werte des Glases sind dabei räumlich ziemlich stabil, die entscheidende *räumliche* Änderung erfährt die Wellenfront durch die Flächenänderung in der Progressionszone. Wird die Pfeilhöhe der Fläche in diesem Bereich durch eine Funktion  $f(x,y)$  beschrieben, so ändert sich die Wellenfront näherungsweise um

$$\Delta W(x,y) \approx (n-1) \cdot f(x,y) \quad (1)$$

wenn  $n$  die räumlich konstante Brechzahl des Glases ist. Die Form der Wellenfrontänderung  $\Delta W$  ist also proportional dem Flächenverlauf. Sie kann im einfachsten Fall durch folgende Funktion beschrieben werden<sup>[3]</sup>

$$\Delta W(x,y) = \frac{\bar{a}}{6} (y^3 + 3yx^2) \quad (2)$$

Darin ist  $\bar{a} = (n - 1)a$  eine noch zu bestimmende Konstante. Die Nabelpunktlinie verläuft dabei in  $y$ -Richtung und wachsende Werte von  $y$  bedeuten eine lineare Zunahme des Brechwertes. Die dioptrischen Eigenschaften einer solchen Wellenfrontänderung müssen mittels differentialgeometrischer Relationen bestimmt werden. Vereinfachend kann gesagt werden, dass der Brechwert von der Krümmung der Wellenfront abhängt. Diese bestimmt sich aus den 2. Ableitungen. Die Rate der räumlichen Änderung des Brechwertes berechnet sich daher aus der 3. Ableitung. In unserem Fall ergibt sich die Rate gleich der Konstanten  $\bar{a}$ , also beispielsweise 0,125dpt/mm.

Dieses Modell soll nun verwendet werden, um zu verstehen, was in der Umgebung eines Punktes  $P_0$  auf dieser Fläche passiert, vgl. Abb. 1. Welche Form hat die Wellenfront etwa im Bereich von 2mm um den Punkt  $P_0$ ? Nach einigen unkomplizierten, aber länglichen Umformungen erhalten wir folgendes Ergebnis:

$$\Delta W(x_0 + \tilde{x}, y_0 + \tilde{y}) = \frac{\bar{a}}{6} \{ y_0^3 + 3y_0x_0^2 + 6y_0x_0 \cdot \tilde{x} + 3(y_0^2 + x_0^2) \cdot \tilde{y} + 3y_0 \cdot (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) + 6x_0 \cdot \tilde{x}\tilde{y} + \tilde{y}^3 + 3\tilde{x}^2\tilde{y} \} \quad (3)$$

Dabei wird der Abstand vom gewählten Punkt  $P_0$  mit den Koordinaten  $(x_0, y_0)$  durch die Variablen  $\tilde{x} = x - x_0$  und  $\tilde{y} = y - y_0$  angegeben. Die optische Bedeutung der einzelnen Summanden ist leicht zu erklären.

Der erste Term ist eine Konstante, die zwar von der Position des gewählten Punktes  $P_0$  abhängt, aber uninteressant ist, weil eine konstanter Phasenterm für die Optik keine Rolle spielt. Die Terme, die linear in  $\tilde{x}$  und  $\tilde{y}$  sind, repräsentieren eine Verkipfung der Wellenfront und damit eine prismatische Wirkung, die sich offenbar mit der Position am Glas ändert. Sie soll aber hier nicht weiter betrachtet werden.

Der Term 2. Ordnung  $\bar{a} y_0 \cdot (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) / 2$  ändert sich entlang der Nabelpunktlinie mit  $y_0$  und ist mit dem lokalen Brechwert verknüpft. Der Astigmatismus, ebenfalls durch einen Term 2. Ordnung,  $\bar{a} x_0 \cdot \tilde{x}\tilde{y}$ , gegeben, wächst entsprechend dem Satz von Minkwitz senkrecht zur Nabelpunktlinie mit  $x_0$  und ist erwartungsgemäß auf der Nabelpunktlinie ( $x_0=0$ ) gleich Null.

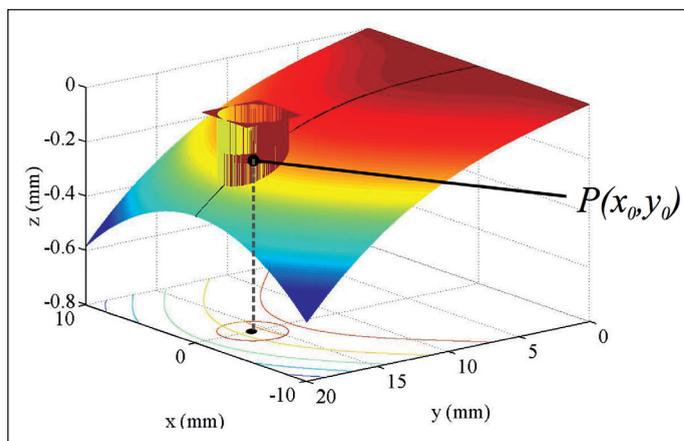


Abb. 1: Gezeigt wird der Anteil der Wellenfront, die für die Brechwertänderung verantwortlich ist. An einer Stelle der Nabelpunktlinie ( $y$ -Achse) wird die Umgebung eines Punkt  $P_0$  mit den Koordinaten  $x_0=0$  und  $y_0$  betrachtet.

### Aberrationen 3. Ordnung

Neues ergibt sich erst aus dem letzten Term 3. Ordnung

$$W^{(3)} = \frac{\bar{a}}{6} (\tilde{y}^3 + 3\tilde{x}^2\tilde{y}) \quad (4)$$

$$= c_3^3 Z_3^3(\rho, \theta) + c_3^1 Z_3^1(\rho, \theta) \quad (5)$$

der offenbar unabhängig von der gewählten Position des Punktes  $P_0$  ist und Bildfehler vom Typus Koma und Dreiblattfehler (Trefoil) repräsentiert. Bei diesen Bildfehlern handelt es sich um so genannte Aberrationen höherer Ordnung, wobei Aberrationen der Ordnung 3 und größer gemeint sind. Die vorliegenden Bildfehler können im Dialekt der Zernike-Polynome ausgedrückt werden, wobei die Polarkoordinaten des normalisierten Radius  $\rho$  und der Azimutwinkel  $\theta$  verwendet werden. Hier liegt eine Kombination der Polynome  $Z_3^3$  und  $Z_3^1$  vor. Die Koeffizienten sind erstaunlicherweise in diesem Modell gleich groß und können wie folgt berechnet werden

$$c_3^3 = c_3^1 = \frac{\bar{a}}{12\sqrt{8}} \rho_{max}^3 \quad (6)$$

wobei der Halbmesser des gewählten Bereichs mit  $\rho_{max}$  bezeichnet wird. Die Einheit der Koeffizienten ist  $\mu m$ , wenn der Halbmesser in mm und die Rate der Brechwertänderung in dpt/mm angegeben wird.

### Experimentelle Daten

Um das Modell an realen Gleitsichtgläsern zu testen, wurde ein Aufbau mit einem Hartmann-Shack-Wellenfrontsensor verwendet, siehe Abb. 2.

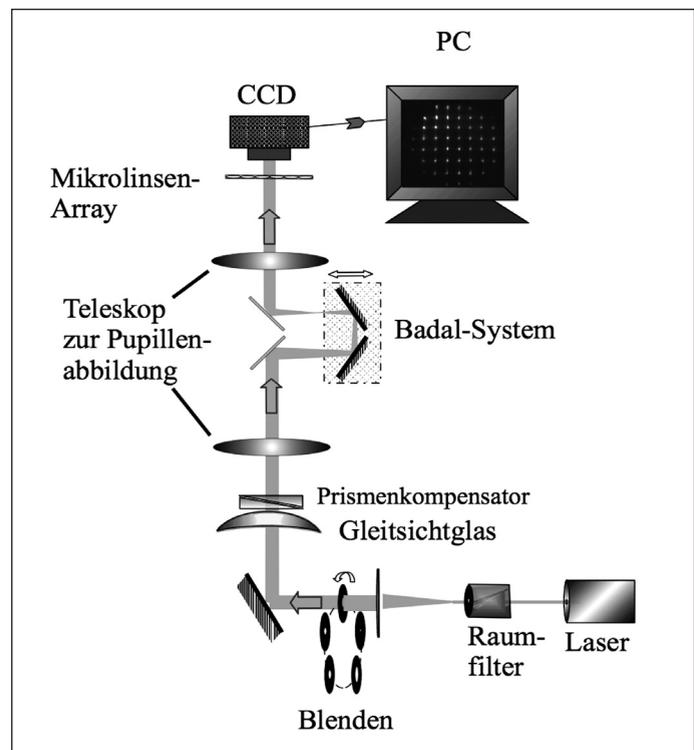


Abb. 2: Experimentelle Anordnung eines Hartmann-Shack-Sensors zur räumlich aufgelösten Vermessung der Wellenfronten nach dem Durchgang durch Gleitsichtgläser.

Alle Daten beziehen sich auf einen Bündeldurchmesser von 4mm Durchmesser auf dem Glas. Der minimale Unterschied zum Durchmesser der Eintrittspupille soll im Folgenden vernachlässigt werden. Die nominellen Daten des Glases lauten sph 0,00 und Addition 2,00. Die Länge der Progressionszone ist etwa 18mm. Da der Anstieg der Addition normalerweise nicht-linear ist, kann von einer effektiv kürzeren Progressionszone ausgegangen werden. Die Rate wurde experimentell zu  $\bar{a}=0,12\text{dpt/mm}$  bestimmt, was bei einer Addition von 2,00 einer effektiven Länge von 16,7mm entspricht. Wie Abbildung 3 zeigt, reproduziert das einfache Modell die absoluten Werte von Koma und Dreiblattfehler mit den theoretischen Werten

$$c_3^3 = c_3^1 = 0.0283 \mu\text{m} \quad (7)$$

recht gut (größte Abweichung etwa 15%). Das Verhältnis beider Werte ist experimentell etwa gleich Eins, wie es im Modell vorhergesagt wird. Der räumliche Verlauf wird qualitativ reproduziert, wenn man sich auf den linearen Teil des Anstiegs (etwa 10mm) beschränkt. Der Astigmatismus wird in einem Abstand von 3mm von der Nabelpunktlinie mit einem Wert von  $0,294\mu\text{m}$  entsprechend dem Satz von Minkwitz sehr gut reproduziert, ohne dass der Wert von  $\bar{a}$  geändert werden müsste. Der Koeffizient des Astigmatismus ist etwa einen Faktor 10 größer als die Beiträge der Aberrationen 3. Ordnung. Aberrationen mit höherer als 3. Ordnung konnten zwar gemessen werden, sie waren aber mindestens um eine Größenordnung kleiner als anderen. Damit kann eine Begrenzung des Modells auf Terme 3. Ordnung gerechtfertigt werden.

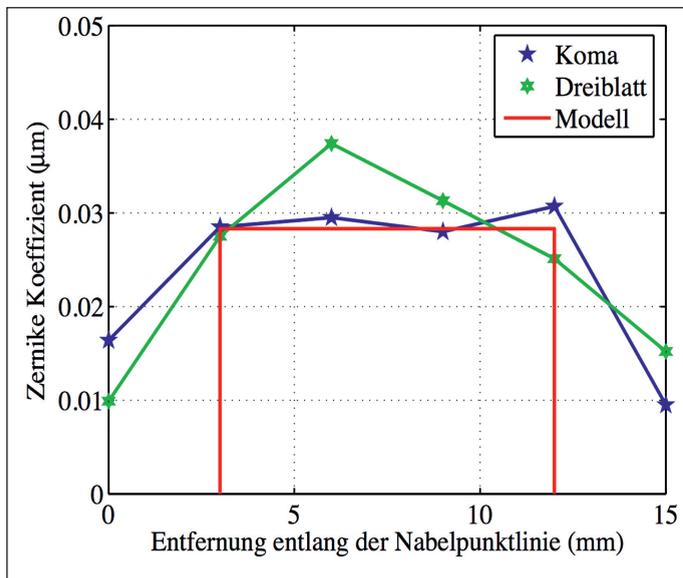


Abb. 3: Vergleich der experimentellen Daten für Koma und Dreiblattfehler (Trefoil) mit den theoretischen Werten. Im Bereich des linearen Anstiegs der Addition stimmen beide gut überein. Insbesondere sind die Koeffizienten von Koma und Dreiblattfehler nahezu gleich groß.

Um Missverständnissen vorzubeugen: Dieses einfache Modell ist nicht in der Lage alle Details der Bildfehler in der Progressionszone zu beschreiben, aber die charakteristischen Eigenschaften werden zumindest semi-quantitativ reproduziert. Das Modell ist daher hinreichend verlässlich, um die Verhältnisse entlang der Nabelpunktlinie zu beschreiben.

## Diskussion

Welchen Einfluss haben nun die Aberrationen höherer Ordnung in der Progressionszone auf das Sehen? Betrachten wir zunächst einen 1-dimensionalen Schnitt durch die Wellenfront, wie er in Abb. 4 dargestellt wird.

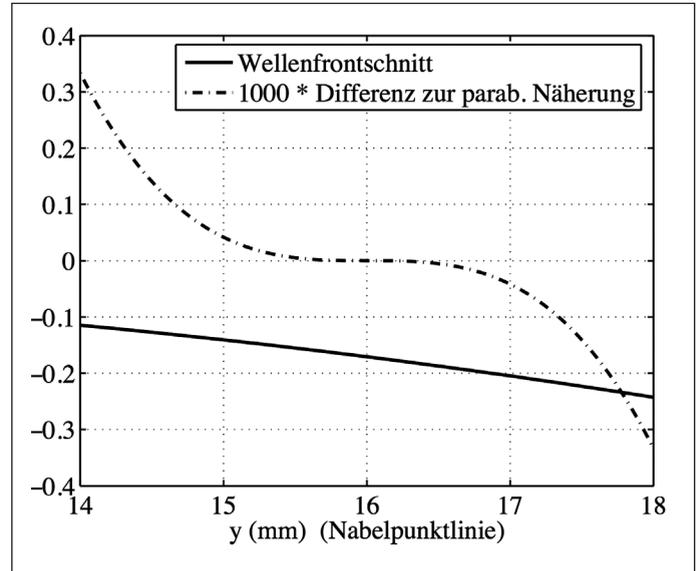


Abb. 4: Schnitt durch die Wellenfront entlang der Nabelpunktlinie. Nach Abzug der Defokussierung (parabolischer Term) verbleibt die Koma als Bildfehler. Zu beachten ist, dass die Darstellung für die Koma um den Faktor 1000 überhöht ist. Die Ordinaten-Werte müssen daher für die Koma in  $\mu\text{m}$  interpretiert werden.

Das Profil der Wellenfront wird dort über einen Bereich von 4mm, zentriert um die willkürliche Position bei 16mm gezeigt. Wird der parabolische Teil, der für die lokale Addition an dieser Stelle verantwortlich ist, abgezogen, so bleibt eine für Koma typische, S-förmig gekrümmte Kurve übrig. Sie ist allerdings in der Abbildung um einen Faktor 1000 überhöht eingezeichnet. In anderen Worten: die Ordinate gibt für die Wellenfront die Werte in mm an. Für die Abweichung von der parabolischen Näherung werden die Differenzen jedoch in  $\mu\text{m}$  angegeben. Die zunehmende Krümmung der Wellenfront, wie sie die Zunahme der Addition erfordert, zeigt also lokal den Bildfehler Koma, wenn nicht nur ein Punkt, sondern ein endlicher Bereich betrachtet wird. Qualitativ kann somit schon gesagt werden, dass zwar die Krümmung der Wellenfront entlang von 4mm um immerhin  $0,5\text{dpt}$  zunimmt, die dazugehörige Koma jedoch recht klein bleibt.

Zur quantitativen Beurteilung der Aberrationen reicht jedoch die Betrachtung nur eines Schnittes der Wellenfront nicht aus. Einen dreidimensionalen Eindruck liefert die Abb. 5, bei der auch der Dreiblatt-Fehler mit seiner typischen dreizähligen Symmetrie sichtbar wird. Wie wirken sich nun diese Bildfehler auf die optische Abbildungsqualität aus?

Für eine quantitative Abschätzung verwenden wir – mangels einer besseren Alternative – die so genannte Strehlsche Definitionshelligkeit (SDH). Sie gibt an, welcher Anteil der Gipfelhöhe des Punktbildes bei Vorliegen von Aberrationen erreicht wird. Der maximale Wert liegt daher bei  $\text{SDH} = 1$ . Eine bequeme Näherung verknüpft die SDH mit der mittleren

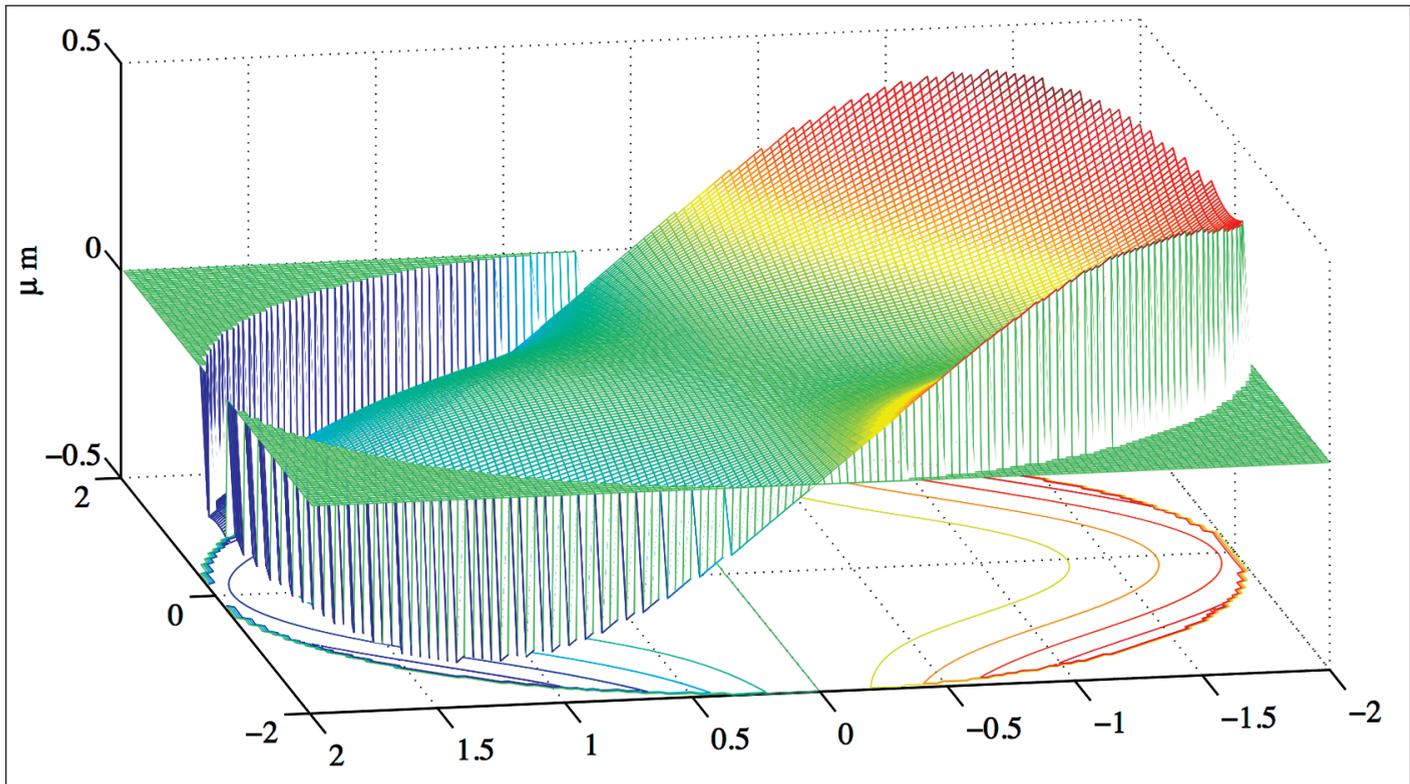


Abb. 5: Pseudo-3D Darstellung der Wellenfrontaberrationen (Überlagerung von Koma und Dreiblattfehler) für einen Bündelquerschnitt von 4mm.

Deformation der Wellenfront. Als Maß der „Verdellerung“ der Wellenfront wird der so genannte RMS-Wert verwendet. Die Abweichungen der Wellenfront vom Mittelwert werden dabei quadriert und aufaddiert. Die Wurzel aus dem Ergebnis ist der RMS-Wert (root mean square: rms). Es gilt

$$\text{SDH} \approx \exp \left[ - \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \text{rms}^2 \right] \quad (8)$$

Ein Vorteil der Verwendung von Zernike-Polynomen liegt darin, dass die Wellenfrontdeformation direkt aus der Wurzel der addierten Quadrate der Koeffizienten berechenbar ist. Der RMS-Wert für die Bildfehler Koma und Dreiblatt-Fehler berechnet sich gemäß der einfachen Formel

$$\text{rms} = \frac{\bar{a}}{24} \rho_{\max}^3 = 0.04 \mu\text{m} \quad (9)$$

Ausgehend von einer monochromatischen Betrachtung für die Wellenlänge von  $\lambda = 0,55\mu\text{m}$  ergibt sich für  $\rho_{\max} = 2\text{mm}$  ein Wert von

$$\text{SDH} = 0,81 \quad (10)$$

der normalerweise als beugungsbegrenzt klassifiziert wird und damit einer exzellenten Abbildungsqualität entspricht. Erhöht man den Durchmesser der Pupille von 4mm auf 5mm, so wächst der RMS-Wert drastisch, da der Halbmesser mit der 3. Potenz in den RMS-Wert eingeht. Selbst dann ergibt sich immer noch ein sehr guter Wert von  $\text{SDH} = 0,45$ .

Zum Vergleich sei der RMS-Wert für eine Defokussierung von einer 1/8dpt genannt:  $\text{rms} = 0,289\mu\text{m}$ . Der Einfluss dieser Defokussierung auf die Sehleistung ist bekannterweise extrem

klein; und das ist mehr als das 7-fache des rms-Wertes von Koma und Dreiblattfehler.

Auch wenn die SDH bekanntermaßen keine besonders gute Korrelation mit dem Visus zeigt, ist doch klar, dass diese Aberrationen 3. Ordnung bei realistischen Pupillengrößen keinerlei Einfluss auf die Sehleistung haben, da die Wellenfrontdeformationen zu klein sind.

## ■ Zusammenfassung

Die Aberrationen in der Progressionszone eines Gleitsichtglases treten entlang und seitlich zur Nabelpunktlinie auf. Für den lateralen Fall gibt der Satz von Minkwitz über den Astigmatismus, einem Bildfehler 2. Ordnung, Auskunft. Es ergeben sich dadurch unvermeidbare Einschränkungen des nutzbaren Blickfeldes, die um so größer sind, desto größer die Rate der Brechwertänderung; das heißt desto kürzer die Progressionszone bzw. desto größer die Addition ist.

Entlang der Nabelpunktlinie entstehen Aberrationen 3. Ordnung. Dabei handelt es sich um Koma und Dreiblattfehler. Sie sind entlang der Nabelpunktlinie konstant, wenn die Rate der Brechwertänderung konstant ist. Werden sie mittels Zernike-Polynomen beschrieben, so sind die jeweiligen Koeffizienten gleich groß. Sie skalieren linear mit der Rate der Brechwertänderung und kubisch mit dem Halbmesser der Pupille. Für eine Rate der Änderung des Brechwertes von 0,12dpt/mm erhalten wir für beide Koeffizienten einen Wert von etwa  $0,03\mu\text{m}$ , wenn die Pupille einen Durchmesser von 4mm hat. Der dazugehörige rms-Wert beträgt  $0,04\mu\text{m}$ .

Ein negativer Einfluss auf die Sehleistung kann damit ausgeschlossen werden, obwohl eine naive Betrachtung immerhin

eine Brechwertänderung von 0,5dpt über die Pupille hinweg ergibt.

Eine Korrektur *dieser* Aberrationen höherer Ordnung wäre nutzlos und eine ziemlich *esoterische* Angelegenheit.

In diesem Modell bedeutet nämlich die Korrektur der Aberrationen 3. Ordnung die Rückverwandlung in ein Einstärken-glas; denn die Aberrationen entstehen *notwendig* durch die kontinuierliche Zunahme der Addition.

Wenn wir auf die Ausgangsfrage zurückkommen, dann ergibt sich, dass Gleitsichtgläser deshalb funktionieren, weil die Addition nur etwa 2,5dpt und die Länge der Progressionszone etliche Millimeter beträgt. Daher ist die Rate der Brechwertänderung relativ klein und die Aberrationen sind es ebenfalls. Weil der maximale Pupillendurchmesser mit zunehmendem Alter ebenfalls abnimmt, halten sich alle Effekte im vernachlässigbaren Rahmen.

Würden wir als Presbyope die Dinge so anschauen wie die Kinder, nämlich mit weit aufgerissenen Augen und einem Abstand von nur etwa 10cm, dann – und auch nur dann –

sähen nicht nur die Gleitsichtgläser, sondern auch deren Aberrationen ganz anders aus.

Der Autor bedankt sich bei der Forschungsgemeinschaft Deutsche Augenoptik für finanzielle Unterstützung.

#### Literatur

- [1] R. Blendowske, E. Villegas, P. Artal, An Analytical Model Describing Aberrations in the Progression Corridor of Progressive Addition Lenses, *Optometry and Vision Science* 2006;83:666–671
- [2] Minkwitz G, Ergänzende Bemerkungen zum so genannten Satz von Minkwitz, DOZ 9-2005
- [3] Alvarez LW, Two-element variable-power spherical element, US Patent 3 305294, 1967

#### **Anschrift des Autors:**

**Ralf Blendowske,  
Hochschule Darmstadt, FB MN,  
Optotechnik und Bildverarbeitung,  
Haardttring 100,  
64295 Darmstadt**